

Matemática atuarial

Introdução

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>



- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ ciências atuariais da Universidade Federal de Alfenas- Campos varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L,H. *Introdução*. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas> . Acesso em: 29 jan. 2026.

A matemática atuarial é um ramo da matemática voltado para a avaliação de riscos, prêmios e reservas associados a operações de seguros, especialmente no ramo de seguros de vida.*.

Revisão de probabilidade

- Fenômeno/ Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Variáveis aleatórias Discretas/Contínuas
- Esperança/Variância de variáveis aleatórias

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de Juros

- *Juros Simples e Composto*
- *Diferentes taxas de juros*
- *Valor presente/Valor futuro*
- *Depósitos em série*
- *Fluxo de caixa*

➤ *Seguros de vida*

- Tempo Discreto/ Contínuo
- Cobertura vitalícia/ temporária
- Efeito imediato/ diferido
- Seguro dotal puro/ misto
- Relações entre seguros

➤ *Anuidades (planos de renda)*

- Cobertura vitalícia/ temporária
- Fluxos de caixa antecipado/ postecipado
- Efeito imediato/ diferido
- Fracionadas /Contínuas

➤ *Comutação*

- Funções de comutação
- Prêmio puro único para planos de seguro de vida
- Prêmio puro único para planos baseados na sobrevivência

➤ *Prêmios e Benefícios*

- Prêmio carregado

➤ *Reservas*

- Método retrospectivo
- Método prospectivo

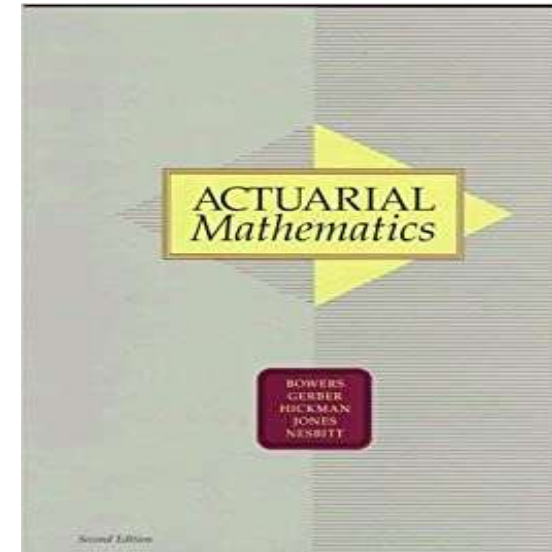
Matemática atuarial ramo vida

- Seguros de vida
 - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte (invalidez permanente)
 - Refletem uma característica única nos seres humanos.

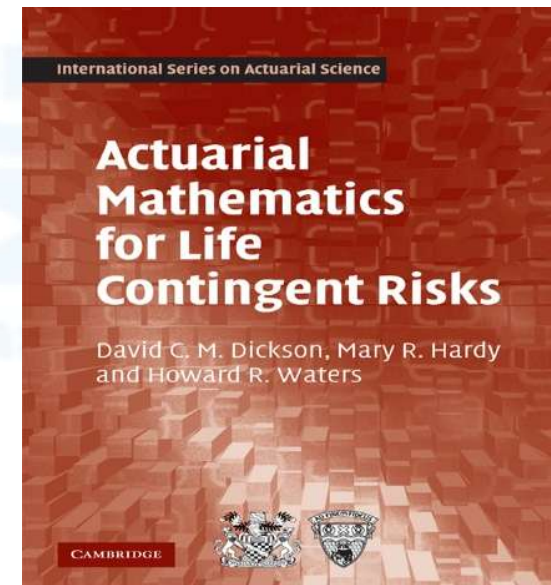
- | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| ➤ $A_{x^{1:\overline{n} }}$ | ➤ $\bar{A}_{x:\overline{n} }$ | ➤ $\ddot{a}_x$ | ➤ $m \ddot{a}_{x:\overline{n} }$ |
| ➤ $\bar{A}_{x^{1:\overline{n} }}$ | ➤ $A_{x:\overline{n} }$ | ➤ a_x | ➤ $m a_{x:\overline{n} }$ |
| ➤ A_x | ➤ $m A_x$ | ➤ $\ddot{a}_{x:\overline{n} }$ | ➤ $\ddot{a}_x^{(m)}$ |
| ➤ $\bar{A}_x$ | ➤ $m \bar{A}_x$ | ➤ $a_{x:\overline{n} }$ | ➤ $a_x^{(m)}$ |
| ➤ $A_{x:\overline{n} ^1}$ | ➤ $m A_{x^{1:\overline{n} }}$ | ➤ $m \ddot{a}_x$ | ➤ $k \ddot{a}_x^{(m)}$ |
| | ➤ $m A_{x:\overline{n} ^1}$ | ➤ $m a_x$ | ➤ $k a_x^{(m)}$ |
| | | | ➤ $\bar{a}_x$ |

Bibliografia

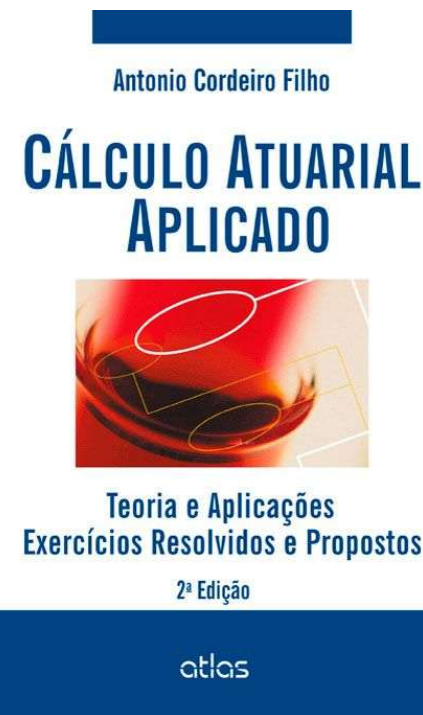
BOWERS, N. et al. *Actuarial mathematics*.
2. ed. Illinois: The Society Of Actuaries, 1997.



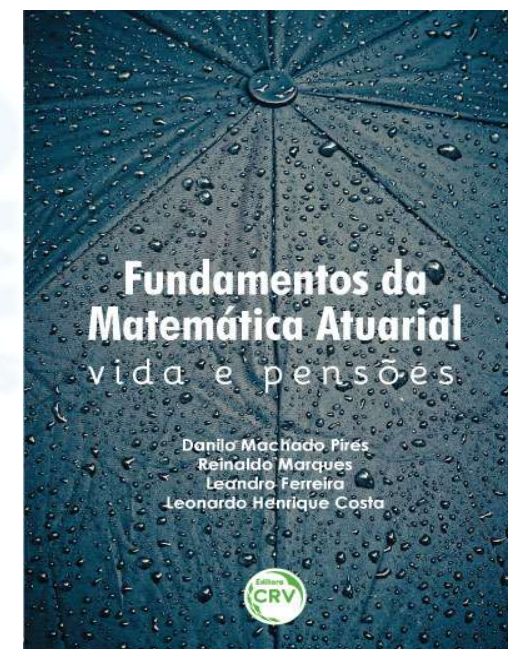
D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.



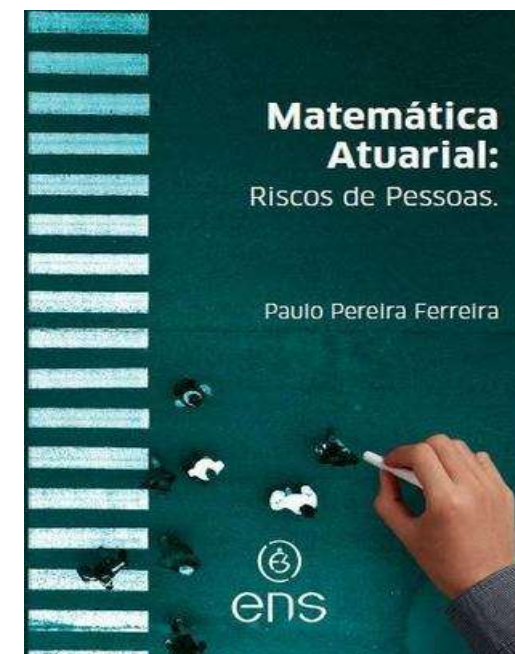
CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.* São Paulo: Atlas, 2009.



PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.* Curitiba: CRV, 2022.



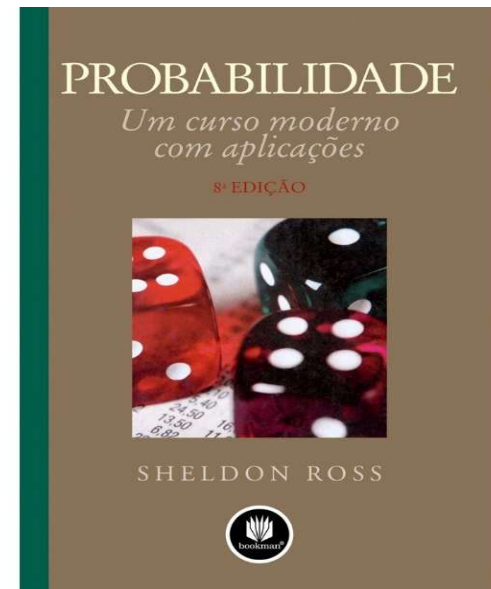
FERREIRA, P. P. *Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas*. Rio de Janeiro: ENS, 2019.



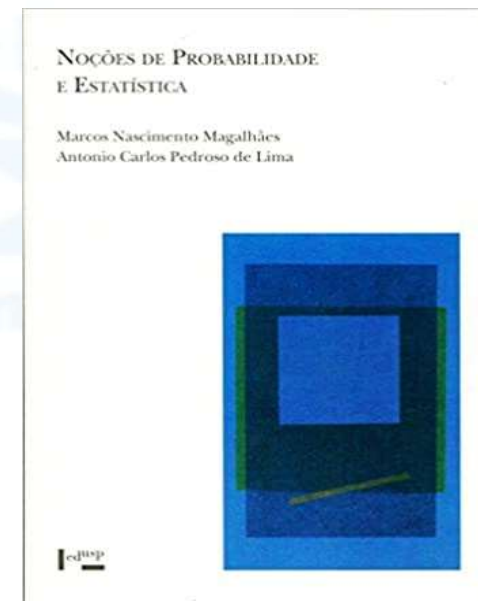
VILANOVA, Wilson. *Matemática atuarial: destinado aos cursos de ciências econômicas, contábeis e atuariais*. Liv. Pioneira, Ed. da Universidade, 1969.



JAMES, B. R.; Probabilidade: *Um Curso em nível intermediário*, IMPA, Rio de Janeiro 3 ed., 2004.



Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001.



Matemática atuarial

Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

Revisão de probabilidade

- A ciência busca coletar informações observáveis da natureza e formular modelos que expliquem ou permitam prever certos fenômenos.
- Método científico,
 - Conjunto de regras para obtenção do conhecimento válido, confiável e passível de verificação sobre fenômenos naturais e sociais. Essencial na investigação científica...
 - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.
- Modelo e realidade por vezes são erroneamente confundidos

Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre contará com incerteza.
- Modelos determinísticos
 - Condições bastante controladas,
 - Variações desprezadas
- Modelos probabilísticos
 - Controle total e inviabilizado
 - Variações não podem ser ignoradas.

Revisão de probabilidade

- *Fenômeno (acontecimento) aleatório* é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
- Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um *experimento probabilístico*.

Revisão de probabilidade

- *Espaço amostral* (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.
- *Definição* Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento.
 - Ω é o evento certo,
 - $\emptyset$ o evento impossível.
 - Se $\omega \subset \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

Revisão de probabilidade

EXEMPLO 1: Defina os seguintes espaços amostrais.

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{ \quad \}$$

2) Temperatura em um determinado instante

$$\Omega = \{ \quad \}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{ \quad \}$$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

2) Temperatura em um determinado instante

$$\Omega = [-273,15, \infty)$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

2) Temperatura em um determinado instante

$$\Omega = [-273,15, \infty)$$

$$A = [-10, 50]$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$

$$A = \{0 \leq t \leq 30\}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade é chamado evento aleatório.

Conceitos de Probabilidade

➤ Teoria clássica

Dado o espaço de resultados Ω , constituído por um número finito de n elementos igualmente prováveis, ..., define-se a probabilidade de acontecimento de A , como sendo a razão de resultados favoráveis A e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados de } A}{n^{\circ} \text{ de resultados possíveis}}$$

...Se conhece fatos decisivos sobre o mecanismo ou processo que produz os resultados.

...Simetria dos resultados

Conceitos de Probabilidade

➤ Teoria Frequentista (empírica)

- Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento A é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

em que n_A é o número de ensaios em que o evento A foi observado, e n o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com que se realiza o evento A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.

Conceitos de Probabilidade

- Probabilidade subjetiva e lógica
 - Define-se como uma medida do grau de confiança em relação a uma proposição (crença racional).
 - Ela é função da quantidade de informação disponível ...
 - Julgamento pessoal .
 - Pensamento *Bayesiano*.
 - Possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Conceitos de Probabilidade

- ...
- *Probabilidade Geométrica*
 - Probabilidade como proporção de comprimento, área ou volume
- *Probabilidade de Shannon*
 - Mede *incerteza* de uma variável aleatória por meio da *entropia de Shannon...*
- *Probabilidades de Conjuntos Difusos*
 - Um evento não é simplesmente verdadeiro ou falso: possui *grau de pertencimento...*
- ...

Revisão de probabilidade

➤ Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto $P()$ que associa a subconjuntos A de Ω um número real $P(A)$ que satisfaz os axiomas a seguir.

- Para todo $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
 - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.
- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de Ω um número real.

EXEMPLO 2: Sabe-se que em uma fábrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos $\left(D \rightarrow P(D) = \frac{1}{4}\right)$

Itens perfeitos $\left(Pe \rightarrow P(Pe) = \frac{3}{4}\right)$

Revisão de probabilidade

Para uma amostra $n = 2$ peças retiradas é possível construir uma tabela onde X é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e $P(X)$ será a probabilidade do resultado.

X	0	1	2
	(Pe, Pe)	$(D, Pe)(Pe, D)$	(D, D)
$P(X)$	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Revisão de probabilidade

➤ Variáveis Aleatórias Discretas

- $P(X = x)$ Função de probabilidade.
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todo i .
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Conjunto enumerável: Quando é finito ou quando existe uma bijeção com os números naturais.

Ex.: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x > 0 \\ -2x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Para $x \in \mathbb{Z}$

Revisão de probabilidade

É um tipo de variável aleatória que pode assumir um número infinito de valores dentro de um intervalo contínuo

➤ Variáveis aleatórias contínuas

- $f(x)$ Função de densidade (*f.d.p*)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

➤ Variáveis Aleatórias Discretas

- $P(X = x)$ Função de probabilidade.
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todo i .
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

➤ Variáveis aleatórias contínuas

- $f(x)$ Função de densidade ($f.d.p$)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

- Função de distribuição de probabilidade (função de distribuição).

Em geral ela é representada por $F_X(x)$.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$$

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i)$$

Revisão de probabilidade

EXEMPLO 3:

a)

X	1	2	3	4
P(X)	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

c)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,7 & \text{se } x = 0 \\ 0,5 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) = \frac{6}{5} \left(\frac{5}{6} \right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty}$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left(-\frac{1}{e^{2 \times 0}} \right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}dx + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}dx$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10} \Big|_{x=0}^{x=2} + \left(-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20} \right) \Big|_{x=2}^{x=6}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Esperança de variáveis aleatórias

- ...forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.
- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.
- ...parâmetro para vários modelos probabilísticos.

Esperança de variáveis aleatórias

➤ Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{x_i \in \Omega} x_i P(X = x_i) = \mu_X$$

➤ Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{\Omega} x f(x) dx = \mu_X$$

Esperança de variáveis aleatórias

- Seja X uma variável aleatória e g é uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função $g(X)$ denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(x)f_X(x)dx$$

$$E[g(X)] = \sum_{x_i \in \Omega} g(x_i)P(X = x_i)$$

Exemplo 4 Segundo determinada tábua de vida, o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?
- b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

Exemplo 4: Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução

a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?

$$E(T) = \sum_{t=0}^3 tP(T = t) = 0,4622$$

b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

$$E[g(T)] = E(v^{T+1}) = \sum_{t=0}^3 v^{t+1}P(T = t) = 0,9866602$$

Esperança de variáveis aleatórias

Seja L um valor limite dentro do domínio de X , e seja Y uma variável aleatória “Valor de X sujeito ao limite L ”. Então:

$$Y = \begin{cases} X, & X < L \\ L, & X \geq L \end{cases}$$

Logo, para o caso de X se contínuo tem-se que:

$$E(Y) = E(X; L) = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + \int_L^{\infty} L f_X(x) dx = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + L S_X(L)$$

E no caso de X se discreto, tem-se:

$$E(Y) = E(X; L) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + \sum_{x_i \geq L} L P_X(x_i) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + L P(X \geq L)$$

Exemplo 5 Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,6751	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) Determinado produto oferecido por uma seguradora tem um prêmio calculado a partir do valor esperado da variável aleatória $g(T) = v \frac{1-v^T}{1-v}$, em que $v = \frac{1}{1,03}$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no valor esperado de $g(T)$, sujeito a um limite técnico $g(2)$. Calcule o prêmio sujeito a esse limite.

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} g(T), & g(T) < g(2) \\ g(2), & g(T) \geq g(2) \end{cases}$$

Equivalente a

$$Y = \begin{cases} g(T), & T < 2 \\ g(2), & T \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E[g(T); g(2)]$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(t) P(T = t) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T = t)$$

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(t) P(T = t) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T = t)$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 v \frac{1 - v^t}{1 - v} P(T = t) + v \frac{1 - v^2}{1 - v} \sum_{t=2}^3 P(T = t) \approx 0,4376311$$

- *Portal Halley* : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. *Actuarial Mathematics*, 2^a edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos*. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUE S,R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões*. Curitiba :CRV,2022.

